

ポートフォリオ管理とインセンティブ：展望

慶應義塾大学経済学部教授 前 多 康 男

目 次

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1. はじめに | 2.3 金融とプリンシパル・エージェントモデル |
| 2. ポートフォリオ管理委託の理論モデル | 3. おわりに |
| 2.1 金融分析の枠組み | |
| 2.2 金融と契約理論 | |

概要

投資信託に代表されるファンドのパフォーマンスはそのファンドを取り巻くインセンティブスキームに影響を受ける。そのようなインセンティブスキームに関しては、実証的及び理論的に経済学研究が積み上がってきている。本論では、これらの研究成果の理論的な側面を展望する。特にプリンシパル・エージェントモデルを用いてポートフォリオ管理委託の問題を分析する枠組みが作り上げられてきた時期に注目し、基本となっているモデルについてより詳しく解説する。

通常のエージェンシー問題とポートフォリオ管理委託問題は、問題の性質が本質的に異なる。典型的なポートフォリオ管理委託問題では、ポートフォリオマネージャーは、情報シグナルを得た後にポートフォリオの組成を行う。この際に、ポートフォリオマネージャーは、シグナルの値に依存して、ポートフォリオの収益率の水準と分散の両方に影響を与えることができる。このことが、プリンシパルが自分にとって最適である誘因両立的な契約を作成することを困難にしている。したがって、ポートフォリオ管理委託問題におけるセカンドベスト契約を一般的に記述する枠組みはまだ未解決の問題となっている。

1. はじめに

投資信託運用会社と投資信託への投資家との間に、または一般的にファンドのマネージャーとファンドへの投資家との間に、エージェンシー問題が存在することはよく知られて

いる。投資家は、投資信託やファンドへの投資に対して期待利益の最大化を求めるのに対して、運用会社は通常それとは異なる目的を持っている。投資家は運用会社の資金運用の意図に対しては情報の非対称性が存在するので、なんらかのメカニズムが働かない限り、資源配分は効率的にはならない。

投資信託運用会社は資金運用に対して信託報酬を得る。信託報酬とは投資信託の管理及び運用に対する対価として投資家が毎月支払う費用のことである。一般的な信託報酬は、投資信託の純資産総額に対する割合を決めておき、その割合が固定されているもので、この固定された割合は信託報酬率と呼ばれる。他の信託報酬のタイプとしてハイウォーターマーク方式がある。この方式では、一定の基準価額を決めておいて、その基準価額を超えた時は通常の信託報酬に加えて、その超えた部分に対して成功報酬が支払われる。この一定の基準価額をハイウォーターマーク (high-water mark) と呼ぶのでこの形の信託報酬をハイウォーターマーク方式と呼ぶ。

固定比率の報酬方式においては、運用会社や運用マネージャーが信託報酬を多く得るためには、純資産総額を大きくする必要がある。純資産総額を大きくするためには、新たな投資を呼び込むことが一番良く、そのためにはパフォーマンスが重要と考えられる。また、ハイウォーターマーク方式などでは、成功報酬の部分を設定することで、パフォーマンスとファンドの収益をより直接的に結びつけている。しかし、一方で、これらの報酬がアップサイドに対して歯止めがついていない場合には、原則的にオプションと同じ形であり、過度なリスクテイクを呼び起こす可能性もある。したがって、これらの報酬制度を比較し、最適な報酬制度を模索するためには、より厳密な分析が必要になってくる。

そのようなインセンティブスキームに関しては、実証的及び理論的に経済学研究が積み上がってきている。本論では、これらの研究成果の理論的な側面を展望する。特にプリンシパル・エージェントモデルを用いてポートフォリオ管理の委託の問題を分析する枠組みが作り上げられてきた時期に注目し、基本となっているモデルについてより詳しく解説し、その後の理論的發展を展望する。

2. ポートフォリオ管理委託の理論モデル

2.1 金融分析の枠組み

■資本資産価格モデル 資本資産価格モデル (capital asset pricing model, CAPM) は金融資産のポートフォリオの期待収益率を記述するモデルで、1960年代半ばに、マークビッツ (Markowitz (1952)) が開発した平均分散分析を基にして、シャープ (Sharpe (1964))⁽¹⁾、リントナー (Lintner (1965))、モッシン (Mossin (1966)) により独立に開発された⁽²⁾。ファンドマネージャーが組成するポートフォリオのパフォーマンスをモデルに取り入れるためには、この資本資産価格モデルを使用することが一般的である。その先駆的な業績は、モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) にみることができる。

■ポートフォリオのリターン 以下で、モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) のモデルを紹介する。投資家とファンドマネージャーが存在する経済で、投資家がポートフォリオの組成をファンドマネージャーに委託することを考える。マネージャーが組成するポートフォリオの収益率を確率変数として $\tilde{R}_p$ で表す。安全資産の収益率を R_F 、市場ポートフォリオの収益率を確率変数として $\tilde{R}_M$ とする。

資本資産価格モデルを用いると、ポートフォリオの期待収益率は、ポートフォリオのシステマティック・リスクを表す β_p を用いて

$$E(\tilde{R}_p) = R_F + \beta_p(E(\tilde{R}_M) - R_F) \quad (1)$$

となる。また、ポートフォリオの収益率は、

$$\tilde{R}_p = R_F + \beta_p(\tilde{R}_M - R_F) + \tilde{\epsilon}_p \quad (2)$$

と書ける。ここで、 $\tilde{\epsilon}_p$ は、期待値が 0 である確率変数である。この $\tilde{\epsilon}_p$ の実現値が正の場合は投資パフォーマンスが優れていることの証拠になり、負の場合は劣っていることの証

拠になる。モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) では、この残差項をパフォーマンス指標と呼んでいる。

■**比例報酬** ファンドマネージャーに支払う報酬について考えてみる。モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) では、まず、ある基準となる収益率があらかじめ設定してあり、その基準収益率とポートフォリオの収益率の差に比例する形で報酬が支払われるような報酬制度を考える。このような報酬制度を比例報酬制度と呼ぶことにする。

$\tilde{R}_s$ を基準収益率とする。この場合の比例報酬 $\tilde{f}_p$ は、

$$\tilde{f}_p = \delta(\tilde{R}_p - \tilde{R}_s) \quad (3)$$

と表すことができる。

基準収益率を市場ポートフォリオの収益率とした場合には、(3)式は

$$\begin{aligned} \tilde{f}_p &= \delta(\tilde{R}_p - \tilde{R}_M) \\ &= \delta(R_F + \beta_p(\tilde{R}_M - R_F) + \tilde{\epsilon}_p - \tilde{R}_M) \\ &\quad \quad \quad ((2)式より) \\ &= \delta(\beta_p - 1)(\tilde{R}_M - R_F) + \tilde{\epsilon}_p \end{aligned} \quad (4)$$

と計算できる。平均的なパフォーマンス、つまり $\tilde{\epsilon}_p = 0$ のときの比例報酬の期待値は、

$$E(\tilde{f}_p) = \delta(\beta_p - 1)E(\tilde{R}_M - R_F) \quad (5)$$

となる。市場リスクプレミアム $(\tilde{R}_M - R_F)$ の期待値が正であることを想定すると、期待報酬は β_p の増加関数になり、 β 値が 1 より大きいファンドでは期待報酬が正になり、 β 値が 1 より小さいファンドでは負になる。

報酬の分散は、

$$\sigma^2(\tilde{f}_p) = \delta^2 \left((\beta_p - 1)^2 \sigma^2(\tilde{R}_M - R_F) + \sigma^2(\tilde{\epsilon}_p) \right) \quad (6)$$

と計算できる。ここで、 $\sigma^2(\tilde{R}_M - R_F)$ は市場リスクプレミアムの分散、 $\sigma^2(\tilde{\epsilon}_p)$ は残差項の分散である。(6)式の右辺の括弧内の第 1 項を市場要因、第 2 項を残差要因と呼ぶ。市場要因は

$\beta_p = 1$ で 0 になり、 β_p が 1 より大きくなっても小さくなくても、1 から離れていくに従って増加していく。しかし、残差要因が β_p の値によってどのように影響されるかどうかについては不明である。もし、残差要因が β_p によって影響されないと仮定したら、報酬の分散は $\beta_1 = 1$ を底とする V 型になることがわかる⁽³⁾。

■**混合報酬制度** 2 番目の報酬制度として、基準となるリターン $\tilde{R}_s$ を、市場ポートフォリオの収益率と安全資産の収益率の加重平均とし、

$$\tilde{R}_s = R_F + \beta_p(\tilde{R}_M - R_F) \quad (8)$$

と置く。この報酬制度を混合報酬制度と呼ぶことにする。このときは、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_p &= \delta(\tilde{R}_p - \tilde{R}_s) \\ &= \delta\tilde{\epsilon}_p \quad ((2)式より) \end{aligned} \quad (9)$$

と計算できる。ここから

$$E(\tilde{f}_p) = 0 \quad (10)$$

$$\sigma^2(\tilde{f}_p) = \delta^2 \sigma^2(\tilde{\epsilon}_p) \quad (11)$$

となる。この式を見ると、混合報酬制度における報酬の分散では、比例報酬制度における市場要因が取り除かれており、残差要因だけになっていることがわかる。

したがって、比例報酬制度のもとでは、 β 値が低いファンドの報酬の分散が大きくなっていったが、混合報酬制度においては、そのようなことは起こらないことになる。 β 値が大きいファンドについても、報酬の分散に対する β 値の影響は混合報酬制度において弱められることになる。

2.2 金融と契約理論

■**契約理論の活用** モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) は、資本資産価格モデルを用いて、投資家がファンドマネージャーに支払う報酬体系についての分析

を行ったが、報酬の形態がファンドマネージャーの行動に及ぼす影響のみを分析したに過ぎない。より厳密に分析するためには、投資家の最適化行動を明示的に取り入れた契約理論によるモデル化が必要になる。契約理論の枠組みの中に、資本資産価格モデルによるポートフォリオ評価を組み込んだモデルの先駆的な業績として、ヘッカーマン (Heckerman (1975)) を挙げることができる。ここでは、ヘッカーマンの分析について概説を行う。

現実経済において、適切に金融投資を行うには専門的な知識が必要であることは明らかである。実際、我々は金融投資を行う際には専門家の助けを借りることが多い。たとえば、投資信託においては、金融商品の選択や投資のタイミングなどを考えているのは、ファンドマネージャーと呼ばれる専門家である。一般の投資家は、投資信託を購入することによって、専門家に資金の運用を任せていることになる。また、株式を直接購入する際にも、証券会社の担当者の意見を聞いたり、投資顧問会社に料金を支払って投資先の情報を得ることもある。このような際には、ファンドマネージャーや投資顧問会社が投資家の利益のみのために働いてくれるかどうかという問題が重要になる。

このような問題を契約理論を用いて、投資家がファンドマネージャーに支払う報酬制度のデザインを行うと想定し分析を行う。この報酬制度がファンドマネージャーのインセンティブにどのように影響を与えるかを解明できれば、実際の契約に対してもその知見を利用することが可能になる。

■ヘッカーマンの問題意識 ヘッカーマン (Heckerman (1975)) の問題意識は、投資家の最適な配分を実現するようなマネージャーに対する報酬制度は存在するかどうかということである。

マネージャーが提供する情報を投資家が正確に評価できるのであれば、自発的な契約で

効率的な資源配分に到達する。しかし、そのような評価ができない時には、投資家は、実体の分からない金融資産を購入する可能性もあるということになる。ヘッカーマンの分析では、効率的な配分を実現するためにはマネージャー自らが一定部分の投資を行う必要がある。相互独占的な設定を用いており、投資家もマネージャーも投資プロジェクトに参加しないという拒否権を保有している。投資家が、マネージャーが行える代替的な投資の詳細、マネージャーのリスク選好などを知っている場合に最適な報酬契約をデザインできることが示されている。

■モデルの基本設定 投資家とファンドマネージャーとの間の契約問題を考える。安全資産の収益率を R_F 、市場ポートフォリオの収益率を $\tilde{R}_M$ とする。

ファンドマネージャーが組成するポートフォリオ j の収益率はマーケットモデル⁽⁴⁾で表すことができるとし、

$$\begin{aligned}\tilde{R}_j &= \alpha_j + \beta_j \tilde{R}_M + \tilde{\epsilon}_j \\ &= \gamma_j + R_F + \beta_j (E(\tilde{R}_M) - R_F) \\ &\quad + \beta_j \tilde{\epsilon}_M + \tilde{\epsilon}_j \quad (12)\end{aligned}$$

とする。ここで、

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \alpha_j + (1 - \beta_j) R_F \\ \tilde{R}_M &= E(\tilde{R}_M) + \tilde{\epsilon}_M \\ E(\tilde{\epsilon}_M) &= E(\tilde{\epsilon}_j) = \text{cov}(\tilde{\epsilon}_j, \tilde{\epsilon}_M) = 0\end{aligned}$$

である。(12)式から

$$E(\tilde{R}_j) = \gamma_j + R_F + \beta_j (E(\tilde{R}_M) - R_F) \quad (13)$$

と計算できる。

投資家は、安全資産や市場ポートフォリオには、マネージャーの助けなく自ら投資が可能と想定しているので、ファンドマネージャーが組成するポートフォリオに追加的に投資するためには、ポートフォリオの収益率 $\tilde{R}_j$ は、 R_F や $\tilde{R}_M$ とは異なった側面を持つ必要がある。

(12)式の R_F の項は、安全資産への投資に対する機会費用を表している。つまり、投資家が安全資産に投資した場合には R_F を得ることができるために、危険資産へ投資する機会費用としてこの式に入っている。

ポートフォリオ j のリスク要因は2つあり、1つは $\beta_j \tilde{\epsilon}_M$ であり、もう1つは $\tilde{\epsilon}_j$ である。 (ϵ_j, ϵ_M) は多変量正規分布に従うことを想定している。リスクの1つの要因である $\beta_j \tilde{\epsilon}_M$ はランダムな市場要因である $\tilde{\epsilon}_M$ に起因する。ポートフォリオ j の保有者は $\beta_j(E(R_M) - R_F)$ の部分が $\beta_j \tilde{\epsilon}_M$ のリスクを補償するのであれば、このポートフォリオを保有する。つまり、ポートフォリオ j の保有者は、ポートフォリオ j に内在している市場リスクを $\beta_j(E(\tilde{R}_M) - R_F)$ の部分で補償されることになる。

残りの項は γ_j と $\tilde{\epsilon}_j$ であり、 γ_j は非確率変数である。 γ_j がリスク v_j を補償して余りあるものであれば、ポートフォリオ j は保有する価値がある。したがって、ポートフォリオ j を保有する価値は γ_j の値で測られることになる。

■投資家の参加条件 投資家がマネージャーが組成するポートフォリオ j に投資するために、報酬として C を期首に支払うとする。投資家の初期資産を W とし、期末の資産を W_1 とする。つまり、

$$W_1 = (W - C)(1 + \tilde{R}_p) \quad (14)$$

となる。

安全資産への投資割合を x_F 、市場ポートフォリオへの投資割合を x_M 、ポートフォリオ j への投資割合を $x_j = 1 - x_F - x_M$ とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_p &= x_F R_F + x_M \tilde{R}_M + x_j \tilde{R}_j \\ &= R_F + (x_M + \beta_j x_j)(\tilde{R}_M - R_F) \\ &\quad + x_j(\gamma_j + \tilde{\epsilon}) \end{aligned} \quad (15)$$

と計算できる。

(15)式は、マネージャーを雇用してマネージャーが組成するポートフォリオ j にも投資を行った時の収益率であるが、マネージャーを雇用することなく、したがってポートフォリオ j に投資を行わない時のポートフォリオの収益率 $\tilde{R}_{pa}$ とする。この場合の投資家の期末資産は、

$$W_{1a} = W(1 + \tilde{R}_{pa}) \quad (16)$$

となる。マネージャーを雇用しないときの安全資産への投資割合を x_{Fa} 、市場ポートフォリオへの投資割合を $x_{Ma} = 1 - x_{Fa}$ とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{pa} &= x_{Fa} R_F + x_{Ma} \tilde{R}_M \\ &= R_F + (x_{Ma} + \beta_j x_j)(\tilde{R}_M - R_F) \end{aligned} \quad (17)$$

と計算できる。

■投資家の効用関数 投資家の効用関数をCRRA型で特定化し、 W を期末資産とすると、

$$U = \frac{1}{1 - \eta} W_1^{1 - \eta} \quad (18)$$

となる。ここで η は $\eta \neq 1$ 、 $\eta > 0$ であるパラメータである。

マネージャーを雇った時の投資家の期待効用は、

$$\begin{aligned} E(U(W_1)) &= (W - C)^{1 - \eta} \frac{1}{1 - \eta} E \\ &\quad \left[(1 + \tilde{R}_p(x_M, x_j))^{1 - \eta} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

となり、マネージャーを雇わない時の投資家の期待効用は、

$$\begin{aligned} E(U(W_{1a})) &= W^{1 - \eta} \frac{1}{1 - \eta} E \\ &\quad \left[(1 + \tilde{R}_{pa}(x_{Ma}))^{1 - \eta} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

となる。(19)式および(20)式の中の収益率を、それぞれ $R_p^*(x_M, x_j)$ および $R_{pa}^*(x_{Ma})$ で表す確実性等価によって置き換えると、

$$E(U(W_1)) = (W - C)^{1-\eta}$$

$$\frac{1}{1-\eta}(1 + R_p^*(x_M, x_j))^{1-\eta} \quad (21)$$

および

$$E(U(W_{1a})) = W^{1-\eta}$$

$$\frac{1}{1-\eta}(1 + R_{pa}^*(x_{Ma}))^{1-\eta} \quad (22)$$

となる。

■**最終ポートフォリオの組成** ポートフォリオ j を使用できる時のポートフォリオ組成の問題を考える。平均分散アプローチを用いて、最終ポートフォリオの組成の問題を表現することにする。ポートフォリオ p の収益率の分散は、

$$v_p = E \left[(\tilde{R}_p - E(\tilde{R}_p))^2 \right]$$

$$= (x_M + \beta_j x_j)^2 v_M + x_j^2 v_j \quad (23)$$

と計算できる⁽⁵⁾。ポートフォリオ p の収益率の期待値を μ_p 以上にする条件のもとで分散を最小化する問題を定式化すると、

$$\min v_p^2 \quad (24)$$

subject to

$$E(\tilde{R}_p) = \mu_p \quad (25)$$

となる。この問題のラグランジュ方程式を、

$$L = v_p - 2\lambda_p(E(\tilde{R}_p) - \mu_p) \quad (26)$$

と設定し、1 階の条件を計算すると、

$$\hat{x}_M = \lambda_p \left(\frac{E(\tilde{R}_p) - R_F}{v_M} - \beta_j \frac{\gamma_j}{v_j} \right) \quad (27)$$

$$\hat{x}_j = \lambda_p \frac{\gamma_j}{v_j} \quad (28)$$

となる。(27)式、(28)式、(25)式を連立して解いて、 $\hat{x}_M$ 、 $\hat{x}_j$ 、 $\hat{\lambda}_p$ を求めることになる。つまり、投資家は、市場ポートフォリオの情報

$(E(\tilde{R}_M), v_M)$ 、安全資産利子率 R_F 、マネージャーの組成したポートフォリオ j の情報 (α_j, β_j) を所与として、各資産への投資割合 $(\hat{x}_M, \hat{x}_j)$ を決定する。この最適な投資割合 $(\hat{x}_M, \hat{x}_j)$ により保有するポートフォリオの収益率が決定される。最適ポートフォリオの収益率の確実等価を $\hat{R}_p^*$ とし、

$$\hat{R}_p^* = R_p^*(\hat{x}_M, \hat{x}_j) = R_p^*(\eta, R_F, E(\tilde{R}_M), v_M, \gamma_j, \beta_j, v_j) \quad (29)$$

と表すことにする。

マネージャーがポートフォリオ j を使用できない時の最適ポートフォリオの収益率の確実等価 $\hat{R}_{pa}^*$ については、同様に計算して、

$$\hat{R}_{pa}^* = R_{pa}^*(\hat{x}_{Ma}) = R_p^*(\eta, R_F, E(\tilde{R}_M), v_M) \quad (30)$$

と表すことにする。

■**投資家が支払う報酬** $\hat{R}_p^*$ はマネージャーが組成するポートフォリオ j を用いて最終ポートフォリオを作成した時の期待収益率の確実等価であり、 $\hat{R}_{pa}^*$ はマネージャーが組成するポートフォリオ j を用いないで最終ポートフォリオを作成した時の期待収益率の確実等価である。これらの値から得る効用が等しくなる報酬の値を求めると、

$$C = W \frac{\hat{R}_p^* - \hat{R}_{pa}^*}{1 + \hat{R}_p^*} \quad (31)$$

と計算できる⁽⁶⁾。ここから C は非負であることがまず分かる。2 番目に C は投資家の初期資産 W に比例することが分かる。3 番目に C は γ_j に増加的で、 v_j に減少的であることが分かる。 γ_j が大きくなると、資産 j の投資家の期待収益は大きくなり確実等価も大きくなる。また、 v_j が減少すると、資産 j の投資家の期待収益は同じく大きくなり、資産 j に投資するためにより多くの報酬を支払うことが可能になる。4 番目に $\hat{R}_p^*$ と報酬は η に対して負の相関があることがわかる。 η が小さい値

の時は、危険回避度が低いことを意味するので、危険資産により多く投資する。そのため期待収益と $\hat{R}_p^*$ が大きくなる。したがって、 η が小さくなると、投資家がマネージャーに支払っても良いと考える C は大きくなる。

投資家が C だけの報酬を支払うために最低限必要な γ の値を図の上に示すと、図1の OO' 曲線の様になる。 OO' 曲線より左上の部分は投資家が自らの判断のみで投資を行う時より期待効用が増加する C と γ の組み合わせを示している。

■マネージャーの雇用決定 マネージャーが市場の資産を評価し、ポートフォリオ j を組成する機会費用を S とする。市場を評価することなく、ポートフォリオ $\hat{R}_j$ を組成しないときに、組成に費やす時間を他に費やすと S の収入を得ることができることを示している。

マネージャーが契約に参加する時には、 C の報酬を受け取り、マネージャーの初期資産 W' とともに投資を行う。マネージャーの最終資産は、

$$W'_1 = (C + W')(1 + \tilde{R}'_p) \quad (32)$$

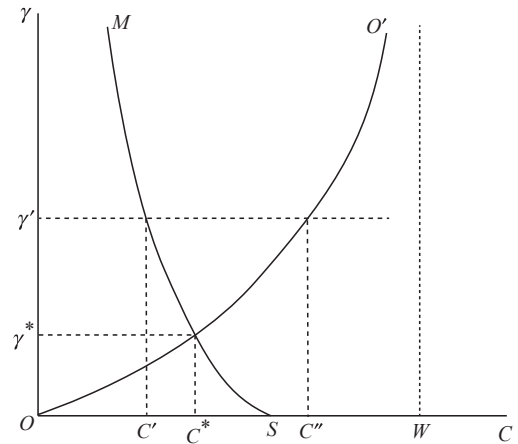
となる。ここで、マネージャーの安全資産への投資割合を x'_F 、市場ポートフォリオへの投資割合を x'_M 、ポートフォリオ j への投資割合を $x'_j = 1 - x'_F - x'_M$ とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{R}'_p &= x'_F R_F + x'_M \tilde{R}_M + x'_j \tilde{R}'_j \\ &= R_F + (x'_M + \beta_j x'_j)(\tilde{R}_M - R_F) \\ &\quad + x'_j(\gamma'_j + \tilde{\epsilon}) \end{aligned}$$

と計算できる。投資家の問題と同様の手順で、マネージャーの最適化問題を設定し解くことができる。最適ポートフォリオの収益率の確実等価を $\hat{R}_p^*$ と置く。ポートフォリオ j を使用できない時の最適ポートフォリオの収益率の確実等価についても、同様に計算して $\hat{R}_{pa}^*$ と置く。

問題の単純化のためマネージャーの初期資

図1 参加条件



産を $W' = 0$ とし、契約に参加することと参加しないことが無差別になる報酬 C を求めると、

$$C = S \frac{1 + \hat{R}'_{pa}}{1 + \hat{R}'_p} \quad (33)$$

と計算できる。マネージャーは C が S より小さい場合でも、 γ' が正である時には、資産 j にマネージャーが自ら投資できることを考慮して、その報酬を受け入れ、契約に参加する場合もある。 γ' が大きくなると、 $\hat{R}'_{pa}$ と $\hat{R}'_p$ の差は大きくなり、 C と S の差に関して許容できる最小値を大きくする。リスク回避度の小さいマネージャーは、 v_j を負担に思わないので、そのようなマネージャーは大きな超過収益を受け取る。その結果比較的少ない C でも契約を受け入れることになる。

マネージャーが C だけの報酬を受け取って契約に参加するために最低限必要な γ' の値を図の上に示すと、図1の MS 曲線の様になる。マネージャーは、 C と γ' の組み合わせが、 MS 曲線の線上または右上にあれば、報酬 C を受け取り、ポートフォリオ j を組成する。 MS 曲線の左下であれば、投資家以外に雇用され S を受け取り、安全資産と市場ポートフォリオに投資を行う。

■契約形態 投資家とマネージャーの相互独占の状態を考え、投資家もマネージャーも、それぞれ他の主体を資産 j へのアクセスから排除できるとする。投資家は資産 j をコントロールしており、それ故マネージャーをプロジェクトから排除できる。また、マネージャーの評価なしに資産 j に投資することは、その資産 j に関する知識が全く状態で投資することになるので、マネージャーは評価を行わないことで投資家を資産 j から排除できる。

図1において、ポートフォリオの収益性が γ' のときには、投資家は、 C'' までの報酬を支払っても良いと考え、マネージャーは C' の報酬をもらえれば契約を承諾する。したがって、報酬が C' と C'' の間にある時には、契約に両者が承諾する。実際の報酬は両者の交渉力によって決まることになる。

■超過収益を観察できない時 投資家が超過収益を観察できない時の契約形態を考える。図1において、投資家はマネージャーに C^* の報酬を提示したとすると、マネージャーは超過収益率が γ^* より大きければ、その報酬を受諾するので、投資家は超過収益率が少なくとも γ^* であることがわかる。投資家が C^* の報酬を提示する時に最低限必要な超過収益率が γ^* であるので、投資家は自発的に C^* の報酬を提示することができる。

2.3 金融とプリンシパル・エージェントモデル

■エージェンシー問題と経済理論 利害が対立する経済主体の間に情報の非対称性が存在する時に、それらの経済主体の行動を分析する手法が1970年代から経済学の分野で開発されてきた。利害が対立する経済主体の間の問題はエージェント問題と呼ばれ、エージェント問題に対する理論的な分析は、ロス (Ross (1973))、マリーズ (Mirrlees (1976))、ジャンセン・メクリング (Jensen and Meckling (1976))、ホルムストロム

(Holmstrom (1979)) などによって展開されてきた。彼らが作り上げていたモデルは、現在プリンシパル・エージェントモデルと呼ばれ、様々な分析に広く用いられている理論体系となっている。

■プリンシパル・エージェントモデルの活用 ヘッカーマン (Heckerman (1975)) は、モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) などによりファンドマネージャーのポートフォリオ組成の分析に用いられた資本資産価格モデルを基礎として、投資家がファンドマネージャーに支払う報酬体系についての分析を契約理論を用いて行った。ロス (Ross (1973)) は、プリンシパル・エージェントモデルの先駆的業績として、一般的な枠組みの提示を行ったが、そのプリンシパル・エージェントモデルの枠組みの中に、資本資産価格モデルによるポートフォリオ評価を組み込んだモデルの先駆的な業績として、バタチャルヤ・フライデラー (Bhattacharya and Pfleiderer (1985)) を挙げることができる。ここでは、バタチャルヤ・フライデラーの分析⁽⁷⁾について概説を行う。

2.3.1 モデル

■金融資産 経済には1人の投資家と多数のマネージャーが存在する。資産としては収益率が R である安全資産と、収益率が $\tilde{P}$ である危険資産が存在する。危険資産の収益率は平均 $\bar{P}$ 、分散 σ_P^2 の正規分布に従っているものとする。つまり、

$$\tilde{P} \sim N(\bar{P}, \sigma_P^2) \quad (34)$$

と想定する。

■シグナル 危険資産の平均 $\bar{P}$ および分散 σ_P^2 は経済主体にとっては直接観察が不可能であるとし、マネージャーは、危険資産に平均0で分散が σ_ϵ^2 の正規分布に従うノイズが加算されたシグナル $\tilde{S}$ の値を観察することができる

とする。つまり、ノイズを

$$\tilde{\epsilon} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (35)$$

として、シグナルは

$$\tilde{S} = \tilde{P} + \tilde{\epsilon}, \quad (36)$$

と書ける。

マネージャーがシグナル $\tilde{S} = S$ を観察したことを条件とする $\tilde{P}$ の事後分布は、

$$(\tilde{P} | \tilde{S} = S) \sim N\left(M(S), \frac{1}{H}\right) \quad (37)$$

となる。ここで、

$$M(S) = KS + (1 - K)\tilde{P} \quad (38)$$

$$K = \frac{\sigma_P^2}{\sigma_P^2 + \sigma_\epsilon^2} \equiv \rho^2 \quad (39)$$

$$H^{-1} = \frac{\sigma_P^2 \sigma_\epsilon^2}{\sigma_P^2 + \sigma_\epsilon^2} \quad (40)$$

と計算できる⁽⁸⁾。

マネージャーがシグナルを観察した後の危険資産の収益率の分散 $\frac{1}{H}$ は、収益率の予測の正確性の指標として使用することができる。経済には正確性の異なる多数のマネージャーが存在するとし、その分布関数を $F(H)$ 、密度関数を $f(H)$ とし、サポートを $(\underline{H}, \overline{H})$ とする。プリンシパル自身の正確性を $H_0 \in (\underline{H}, \overline{H})$ とする。

■モデルの基本設定 W_0 の資産を持った投資家が、安全資産と危険資産に投資するという問題を考える。プリンシパルである投資家がエージェントであるマネージャーに資産の管理を委託するプリンシパル・エージェント問題を考える。

エージェントの留保賃金を $r(H)$ と置く。正確性が高いエージェントは他の雇用でも高い収入が得られるとして、 r は H の増加関数と仮定する。

エージェントの効用関数を、

$$U_A(\tilde{W}_A) = -\exp(-a\tilde{W}_A) \quad (41)$$

プリンシパルの効用関数を、

$$U_B(\tilde{W}_B) = -\exp(-b\tilde{W}_B) \quad (42)$$

とする。また、報酬スキーム $f: [\underline{H}, \overline{H}] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\tilde{W}_A = f(h, m(\tilde{M}, h), \tilde{P}) \quad (43)$$

で定義する。ここで、 h はエージェントが報告する正確性、 $m(\tilde{M}, h)$ は同じくエージェントが報告する危険資産の収益率の条件付き期待値、 $\tilde{P}$ は危険資産の事後的収益率である。

エージェントの報告 (m, h) を基にして、プリンシパルはポートフォリオを決定する。危険資産への投資を $\omega(m, h)$ とし、残りの $W_0 - \omega(m, h)$ は安全資産への投資とする。

■真実表明メカニズム モデル構造の時間的なタイミングをまとめると以下になる。プリンシパルは、エージェントの表明値 (m, h) の関数としてエージェントに対する報酬を提示する。エージェントはまず自分の H に関する表明 h を行う。その後エージェントはシグナルを観察し、シグナルの真の値を条件とする危険資産の収益率の期待値 M を計算する。この M に関して m を表明する。

H について真実を表明し、 M を観察した時に m を報告した場合のエージェントの条件付き期待効用は、

$$E \left[U_A(f(H, m, \tilde{P})) \mid \tilde{M} = M \right]$$

であるので、真実表明メカニズム⁽⁹⁾においては、まず、すべての M について、

$$M \in \arg \max_m$$

$$\left[U_A(f(H, m, \tilde{P})) \mid \tilde{M} = M \right] \quad (44)$$

が成立している必要がある。(44)式が満たされていれば、 H について真実を表明した場合、

または H が公開情報である場合は M についても真実を報告することになる。

M についての(44)式と同様な真実表明を表す式は、 M について真実を報告するときには、 H について真実を表明することを表すことを表現することになる。しかし、 H について嘘の表明を行い、 H についての嘘に依存して、 M についても嘘の報告を行うことが最適になる可能性もある。この可能性を排除するために、まず、

$$\bar{m}(M, h) \in \arg \max_m \left[U_A(f(h, m, \tilde{P})) \mid \tilde{M} = M \right] \quad (45)$$

を定義する。つまり、 h を報告し、 M を観察した時に、 $\bar{m}(M, h)$ を報告することが最適になることを示している。この $\bar{m}(M, h)$ を用いて、

$$H \in \arg \max_h E \left[U_A(f(h, \bar{m}(M, h), \tilde{P})) \right] \quad (46)$$

を定義する。 h を報告し、 M を観察した時に、それらの値に依存して $\bar{m}(M, h)$ を報告する。その時に H に関して真実を表明することが最適になることを表している。真実表明メカニズムにおいては(44)式と(46)式が満たされる必要がある。

エージェントがプリンシパルの提示した報酬スキームを承諾することによって契約に参加する条件は、報酬スキームが、

$$\mathcal{H} = \left\{ H \mid E \left[U_A(f(H, \tilde{M}, \tilde{P})) \right] \geq V(H) \right\} \quad (47)$$

に含まれていることである。ここで、 $V(H)$ は正確性が H のエージェントの留保効用で、

$$V(H) = U_A(r(H)) = -\exp(-ar(H)) \quad (48)$$

で計算できる。

■**プリンシパルの問題** 多数のエージェントの中から、1人のエージェントがランダムに選ばれ、そのエージェントに $f(\cdot)$ を提示する。

$H \in \mathcal{H}$ であればエージェントは契約に参加する。参加した後に、エージェントは彼の H を表明し、ポートフォリオの管理を行う。したがって、プリンシパルが最大化する式は、

$$C_1 + C_2 \cdot \text{Prob}[H \notin \mathcal{H}(f(\cdot))] \quad (49)$$

と計算できる。ここで、

$$C_1 = \int_{H \in \mathcal{H}(f(\cdot))} E \left[U_B \left(W_0 R + w(\tilde{M}, H) (\tilde{P} - R) - f(H, \tilde{M}, \tilde{P}) \right) \right] dF(H) \quad (50)$$

$$C_2 = E \left[U_B \left(W_0 R + w(\tilde{M}, H) (\tilde{P} - R) - r(H_0) \right) \right] \quad (51)$$

である。ここで、(51)式の中の $r(H_0)$ はプリンシパルがポートフォリオ管理を行うことの機会費用を表している。

■**最適報酬制度** H が共通情報で、 $\tilde{M}$ のみが私的情報であるという想定のもとで、誘因両立的である最適（ファーストベスト）な報酬制度について調べる。この設定における最適な報酬制度は、エージェントに報酬 A を支払い、エージェントの望むようにリスク資産に投資を行わせることになる⁽¹⁰⁾。

エージェントの危険資産への投資額を $w_A(M, H)$ とすると、安全資産への投資額は $A - w_A(M, H)$ となる。したがって、エージェントの期末の資産は、

$$f(M, H, \tilde{P}) = (A - w_A(M, H))R + w_A(M, H)\tilde{P} = AR + w_A(M, H)(\tilde{P} - R) \quad (52)$$

となる。従って最適投資ルールは、

$$\begin{aligned} & \max_w E \left[-\exp \left(-a \left(AR + w \cdot (\tilde{P} - R) \right) \right) \mid \tilde{M} = M \right] \\ & = \max_w E \left[-\exp \left(-a \left(AR + w \cdot (M - R) - \frac{a}{2} \frac{w^2}{H} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (53)$$

の解で表され、実際に解いてみると、

$$w_A(M, H) = \frac{H(M - R)}{a} \quad (54)$$

となる。したがって、危険資産の事後平均 M と正確性 H のもとで、エージェントは54式だけの投資を自発的に選択することになる。このときのエージェントの効用は、

$$E[U_a(\cdot) | M, H] = -\exp\left(-a\left(AR + \frac{(M - R)^2 H}{2a}\right)\right) \quad (55)$$

と計算できる。

次にこのファーストベストを達成する報酬制度について考察を行う。報酬制度を

$$f(h, m, \tilde{P}) = \alpha(h, m) + \beta(h, m)(\tilde{P} - R) \quad (56)$$

とする。この報酬制度が誘因両立的（真実表明）である事の必要十分条件は、 $\alpha(h, m)$ が定数であることであることを示すことができる⁽¹¹⁾。

■真の事後平均の報告 56式の報酬制度が、 H と M については真実表明であるということはあくまでも弱い意味においてであり、 H と M について嘘をついても効用が変わらない状態もあり得る。実際、 H について嘘の報告をしたエージェントは、 M についても嘘をつくことで59式を結果的に満たすように行動することができる。この場合には、表明された h の値を使用してスクリーニングを行うことができない。

ここでは、 H についてどのような報告をしようとも M については真実を報告するような、つまり $m(M, h) = M$ である報酬制度を探すことにする。

ここで、

$$f(m, \tilde{P}) = \gamma_1 - \gamma_2(\tilde{P} - m)^2 \quad (60)$$

の形の報酬制度を考える。 $\tilde{P}$ の事後分布関数は対称的であることを仮定すると、60式の報酬制度のもとでは $m = M$ が最適な報告にな

ることを示すことができる⁽¹²⁾。

2.3.2 正確性の真実表明

H に対する真実表明の問題を考えるにあたり、以下の報酬体系を考える。

$$f(m, h, \tilde{P}) = \frac{1}{a} \log \gamma_1(h) - \frac{1}{a} \gamma_2(h) (\tilde{P} - m)^2 \quad (64)$$

正確性が H であるエージェントが h を報告した時の期待効用は、

$$\begin{aligned} G(h, H) &\equiv E\left[-\exp\left(-a\left(\frac{1}{a} \log \gamma_1(h) - \frac{1}{a} \gamma_2(h) (\tilde{P} - m)^2\right)\right)\right] \\ &= \frac{-1}{\gamma_1(h)(1 - 2\gamma_2(h)/H)^{\frac{1}{2}}} \quad (65) \end{aligned}$$

と計算できる。

まず H を正しく表明する条件を導出する。46式から

$$\mathcal{E}(h, H) \equiv E[U_A(f(h, \tilde{m}(M, h), \tilde{P}))] \quad (66)$$

を定義する。 $\mathcal{E}(h, H)$ は真実が H のときに h を表明した時のエージェントの期待効用である。

H を正しく表明する条件は

$$H \in \arg \max_h \mathcal{E}(h, H) \quad (67)$$

である。また、エージェントの留保効用水準が等号で H の真実表明で達成されるとき、

$$\mathcal{E}(H, H) = V(H) \text{ for all } H \quad (68)$$

が成立する。いくつかの付加的な条件のもとで67式および67式を満たす $\gamma_1(h)$ および $\gamma_2(h)$ が存在することを示すことができる⁽¹³⁾。

3. おわりに

ストラッカ (Stracca (2006)) が指摘しているように、通常のエージェンシー問題とポ

ートフォリオ管理委託問題は問題の性質が本質的に異なる。例えば、本論で解説したバチャルヤ・フライデラー（Bhattacharya and Pfleiderer (1985)）などの典型的なポートフォリオ管理委託問題では、エージェントは、情報シグナルを得るために行う努力を行い、その後で、シグナルに実現に応じて（プリンシパルが観察できない）行動が起きる。この際に、ポートフォリオマネージャーは、シグナルに対する反応の大きさを、ポートフォリオリターン水準と分散の両方に影響を与えるために制御できる。しかし、通常のエージェンシー問題では、リターンと分散の両方ではなく、どちらかを制御できる形になっている。このことがポートフォリオ管理委託問題を複雑化している。

特に、ポートフォリオ管理委託問題において、エージェントが努力を制御し、リスクに影響を与えることができることは、プリンシパルが自分にとって最適である誘因両立的な契約を書くことを難しくしている。既存の研究文献は、それぞれが問題設定、使用している仮定、モデルの特定化の程度などが様々に異なっており、ポートフォリオ管理委託問題のセカンドベストを一般的に解く枠組みはまだ未解決の問題として残っている⁽¹⁴⁾。

【参考文献】

- Bhattacharya, Sudipto (1980) "Nondissipative signaling structures and dividend policy," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 95, pp. 1-24.
- Bhattacharya, Sudipto and Paul Pfleiderer (1985) "Delegated portfolio management," *Journal of Economic Theory*, Vol. 35, pp. 1-25.
- Fama, Eugene F. (1973) "A Note on the Market Model and the Two-Parameter Model," *Journal of Finance*, Vol. 28, pp. 1181-1185.
- Heckerman, Donald G. (1975) "Motivating managers to make investment decisions," *Journal of Financial Economics*, Vol. 2, pp. 233-320.
- Holmstrom, B. and P. Milgrom (1987) "Aggregation and linearity in the provision of intertemporal incentives," *Econometrica*, Vol. 55, pp. 303-328.
- Holmstrom, Bengt (1979) "Moral Hazard and Observability," *Bell Journal of Economics*, Vol. 10, pp. 74-91.
- Jensen, Michael C. and William H. Meckling (1976) "Theory of the firm: Managerial behavior, agency costs and ownership structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, pp. 305-360.
- Lintner, John (1965) "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, pp. 13-37.
- Markowitz, Harry M. (1952) "Portfolio selection," *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77-91.
- Mirrlees, James A. (1976) "The Optimal Structure of Incentives and Authority within an Organization," *Bell Journal of Economics*, Vol. 7, pp. 105-131.
- Modigliani, Franco and Gerald A. Pogue (1975) "Alternative Investment Performance Fee Arrangements and Implications for SEC Regulatory Policy," *Bell Journal of Economics*, Vol. 6, pp. 127-160.
- Mossin, Jan (1966) "Equilibrium in a capital asset market," *Econometrica*, Vol. 34, pp. 768-783.
- Myerson, Roger B. (1979) "Incentive Compatibility and the Bargaining Problem," *Econometrica*, Vol. 47, pp. 61-73.
- Ross, Stephen A. (1973) "The Economic Theory of Agency: The Principal's

- Problem," *American Economic Review*, Vol. 63, pp. 134-139.
- Rothschild, Michael and Joseph E. Stiglitz (1970) "Increasing risk: I. A definition," *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, pp. 225-243.
- Sappington, D. E. M. (1991) "Incentives in principal-agent relationships," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 5, pp. 45-66.
- Savage, Leonard J. (1971) "Elicitation of Personal Probabilities and Expectations," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, pp. 783-801.
- Sharpe, William F. (1964) "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk," *Journal of Finance*, Vol. 19, pp. 425-442.
- (1966) "Mutual fund performance," *Journal of Business*, Vol. 39, pp. 119-138.
- Stracca, L. (2006) "Delegated portfolio management: a survey of the theoretical literature," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 20, pp. 823-848.
- Treynor, Jack L. (1973) "How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection," *Journal of Business*, Vol. 46, pp. 66-86.
- Wilson, Robert (1968) "The Theory of Syndicates," *Econometrica*, Vol. 36, pp. 119-132.
- 酒井良清・前多康男 (2003) 『新しい金融理論』、有斐閣。
- (2004) 『金融システムの経済学』、東洋経済。
- (2011) 『金融論』、培風館。
- 前多康男・鹿野嘉昭・酒井良清 s (2006) 『金融論をつかむ』、有斐閣。

[注]

- (1) シャープ (Sharpe (1966)) およびファマ (Fama (1973)) も参照。

- (2) 資本資産価格モデルについては、前多・鹿野・酒井 (前多他 (2006))、酒井・前多 (酒井・前多 (2003))、酒井・前多 (酒井・前多 (2004))、酒井・前多 (酒井・前多 (2011)) などを参照。

- (3) モジリアニ・ポグー (Modigliani and Pogue (1975)) では、1960年から1971年までの49のファンドのデータを用いて残差要因の推計を行っており、

$$\sigma^2(\tilde{\epsilon}_p) = \begin{matrix} 4.17 \\ (1.7) \end{matrix} - \begin{matrix} 14.9\beta_p \\ (-2.5) \end{matrix} + \begin{matrix} 16.4\beta_p^2 \\ (4.7) \end{matrix} \quad (R^2 = 0.62) \quad (7)$$

という結果を得ている。この推計結果で係数の下の括弧の中の数値はt値である。

- (4) マーケットモデルについては、ファマ (Fama (1973)) を参照。
- (5) トレイナー (Treynor (1973)) 参照。
- (6) (19式と(21式を等しいと置いてCについて解く。
- (7) バタチャルヤ (Bhattacharya (1980)) で展開したモデルを基礎にしている。
- (8)

$$\begin{aligned} H^{-1} &= \text{Var}(\tilde{P}|\tilde{S} = S) = \text{Var}(\tilde{P}) - K^2 \text{Var}(\tilde{S}) \\ &= \sigma_P^2 - \frac{\sigma_P^4}{(\sigma_P^2 + \sigma_\epsilon^2)^2} (\sigma_P^2 + \sigma_\epsilon^2) = \frac{\sigma_P^2 \sigma_\epsilon^2}{\sigma_P^2 + \sigma_\epsilon^2}. \end{aligned}$$

(40式より、 $\tilde{P}$ の条件付き分散は $\tilde{S}$ の実現値に依存しないことが分かる。サベッジ (Savage (1971)) など参照。

- (9) マイエルソン (Myerson (1979)) 参照。
- (10) ウィルソン (Wilson (1968)) が示したように、ファーストベストであるシェアリングルールが線形である場合には、最適な行動に先立つ情報に関して真実表明を行うことは誘因両立的である。プリンシパルに対して、エージェントと同様に、指数関数の効用関数を想定すれば、ファーストベストのシェアリングルールは線形になる。
- (11) エージェントのHとMに対する条件付き期待効用は、

$$E \left[U_A(f(h, m, \tilde{P}) \mid M, H) = \right. \\ \left. - \exp \left(-a \left(\alpha(h, m) + \beta(h, m)(M - R) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{a\beta(h, m)^2}{2Ha} \right) \right) \right] \quad (57)$$

となる。(57)式を、 m について最大化するときの1階の条件は、

$$\frac{\partial \alpha(\cdot)}{\partial m} + \frac{\partial \beta(\cdot)}{\partial m} \left((M - R) - \frac{a\beta(\cdot)}{H} \right) = 0 \quad (58)$$

と計算でき、ここから、

$$\beta(h, m(M)) = \frac{H}{a} \left((M - R) + \frac{\frac{\partial \alpha(\cdot)}{\partial m}}{\frac{\partial \beta(\cdot)}{\partial m}} \right) \quad (59)$$

となる。(59)式が(54)式と整合的になるためには、 $\frac{\partial \alpha(\cdot)}{\partial m} = 0$ が必要になる。したがって $\alpha(h, m) = \hat{\alpha}(h)$ となる。

(12) 示すべきことは、

$$M \in \arg \max E \left[U_A(f(h, m, \tilde{P}) \mid \tilde{M} = M) \right] \quad (61)$$

である。(60)式は、

$$f(m, \tilde{P}) = \gamma_1 - \gamma_2 \left((\tilde{P} - M)^2 + \right. \\ \left. 2(\tilde{P} - M)(M - m) + (\tilde{M} - m)^2 \right) \quad (62)$$

と変形できる。対称的な分布に関しては、

$$E \left[\tilde{P} - M \mid (\tilde{P} - M)^2 = \delta \right] = 0 \text{ for all } \delta \geq 0 \quad (63)$$

が成立するので、 $m = M$ のもとで得られる $f(m, \tilde{P})$ は2次の確率優位の意味で真実を表明することになる。したがって、リスク回避的なエージェントは $m = M$ となる。ロスチャイルド・スティグリッツ (Rothschild and Stiglitz (1970)) 参照。

(13) バタチャルヤ・フライデラー (Bhattacharya and Pfleiderer (1985)) 参照。

(14) 一般的な枠組みでは、ホルムストロム・ミルグロム (Holmstrom and Milgrom (1987)) やサピントン (Sappington (1991)) で議論されているように、プリンシパルがリスク中立的またはCARA型の効用関数を持っており、エージェントがCARA型の効用関数を持っているような場合には、最適契約として線形契約が得られる。

(まえだ・やすお)